



Modelo de crescimento económico: Otimidade em recursos não renováveis

Catarina Reis Belchior Campelo

Orientada por:

Professor Doutor Paulo José Abreu Beleza de Vasconcelos
Professor Doutor Óscar João Atanazio Afonso

Tese de Mestrado em Economia

2013

Breve Nota Bibliográfica

Catarina Reis Belchior Campelo nasceu no Porto, Portugal, a 13 de Novembro de 1990. Licenciou-se em Matemática, com especialização em Matemática Aplicada na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, em junho de 2011. Em setembro de 2011, ingressou no Mestrado em Economia, na área de especialização de Modelação e Simulação Económica, na Faculdade de Economia do Porto.

A nível da experiência profissional em prol do dinamismo e da proatividade, merecem destaque as explicações de Matemática no Ensino Secundário, lecionadas desde setembro de 2011 até ao presente ano letivo. Além disso, de setembro de 2012 a março de 2013, fez um estágio curricular na *Ubiwhere*, uma empresa que fornece serviços de consultoria e de desenvolvimento de *software*. Desta enriquecedora experiência, resultou o contributo para a criação de uma rede social para desportistas, o *Playnify*. Por último, de março a julho do corrente ano, lecionou aulas de apoio a Matemática II na Faculdade de Economia do Porto, a alunos dos Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa (PALOP).

Agradecimentos

Sendo este trabalho o culminar de mais uma etapa do meu percurso académico, não posso deixar de agradecer a todos que, direta ou indiretamente contribuíram para que a sua realização fosse possível.

Aos meus orientadores, Professor Doutor Paulo José Abreu Beleza de Vasconcelos e Professor Doutor Óscar João Atanazio Afonso, pela sua total disponibilidade e paciência no notável acompanhamento deste projeto, pela partilha de conhecimentos, pela constante motivação e fonte de estímulo, indispensável na concretização deste trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais e ao meu irmão, pelo amor e apoio incondicional ao longo de toda a minha vida.

Ao Diogo, pela incansável compreensão e confiança que, ao meu lado, sempre me transmitiu.

A todos os meus amigos, por todo o carinho e companheirismo e pelas palavras sempre amigas.

A todos, o meu mais sincero, agradecimento.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma implementação numérica para o modelo Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz (DHSS) que representa uma economia com um *stock* de capital humano e um *stock* de recursos não renováveis. Este modelo é muito importante em crescimento económico pois compreende características usadas noutros modelos mais complexos. Modelos económicos com processos de otimalidade, conduzem a sistemas de equações diferenciais; no caso vertente, a um problema de valores fronteira. Em geral, este tipo de modelos não apresenta solução fechada, sendo apenas possível a sua resolução por métodos numéricos.

No entanto, a versão do modelo DHSS a apresentar tem solução analítica (devido a Benckroun e Withagen, 2011). Porém, uma extensão deste modelo, de crescimento endógeno com recursos não renováveis, pode já não ter uma solução fechada ou, pode ser muito difícil de obter. Note-se que a formulação analítica da solução é de tal forma complexa que inviabiliza a sua interpretação económica.

Nesse sentido, com uma solução numérica, temos a capacidade de generalizar o modelo considerando outras variáveis económicas importantes, ou tomando novos cenários fundamentados no modelo base ou endogeneizando variáveis exógenas. Serão apresentados os resultados numéricos (implementados computacionalmente usando um *software* adequado – *Matlab*), juntamente com a sua interpretação económica.

Classificação JEL: E20, O11, Q30, C65

Palavras-Chave: Recursos não renováveis, Modelo Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz, Crescimento Económico

Abstract

In this thesis we present a numerical implementation for the Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz (DHSS) model, which represents an economy with man-made capital and nonrenewable resources stock. This model is very important for economic growth since it includes features used in other, more complex, models. Economic models with optimality processes lead to systems of differential equations, in the case at hand, a boundary value problem. Generally, this type of model presents no closed form solution, and its resolution is only possible through numerical methods.

However, the version of the DHSS model to present has a closed solution, which is already known (due to Benchekroun and Withagen, 2011). Still, an extension of this endogenous growth with exhaustible resources model may not have a closed solution or it may be very difficult to obtain. Note that the analytical formulation of the solution is so complex that inhibits its economic interpretation.

Therefore, with a numerical solution we gain the ability to generalize the model considering other relevant economic variables, either by considering new frameworks based on this baseline model or by endogenizing some of the exogenous variables. Numerical results (computationally implemented using appropriate software - Matlab) will be presented, along with their economic interpretation.

JEL Classification: E20, O11, Q30, C65

Key words: exhaustible resources, Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz economy, economic growth

Índice

1 Introdução	1
2 Descrição e pressupostos do modelo Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz (DHSS)	4
2.1 Otimização do modelo: condições de primeira ordem	6
2.2 Dedução do modelo: Computação Simbólica	9
3 Resolução do modelo DHSS	13
4 Simulação do modelo DHSS	18
4.1 Apresentação dos resultados	19
4.2 Análise e discussão dos resultados	24
5 Conclusão	27
6 Apêndice	29
6.1 Dedução do Hamiltoniano com duas restrições	29
7 Referências Bibliográficas	38

Lista de Figuras

- 1 Solução numérica obtida através do *bvp4c* para rendimentos crescentes à escala: $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.5$ (consumo inicial inferior à taxa de consumo *maximin*) 21
- 2 Solução numérica obtida através do *bvp4c* para rendimentos crescentes à escala: $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.1$ (consumo inicial superior à taxa de consumo *maximin*) 22
- 3 Solução numérica obtida através do *bvp4c*, para rendimentos crescentes à escala: $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.1825$ (consumo inicial igual à taxa de consumo *maximin*) 22
- 4 Solução numérica obtida através do *bvp4c*, para rendimentos constantes à escala: $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.3$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.5$ 24
- 5 Incremento ΔJ e primeira variação δJ do funcional J (retirado de Naidu, 2003) 30
- 6 Sistema de valores finais livres de tempo e estado, em que se pretende representar as perturbações efetuadas no vetor estado $x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ e no vetor controlo $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$ (retirado de Naidu, 2003) 32

1 Introdução

Ao longo da história da teoria económica desenvolveram-se várias teorias de crescimento económico. Das diversas correntes desenvolvidas é de frisar a corrente clássica (David Ricardo, Thomas Malthus, Adam Smith), a corrente keynesiana (Harrod e Kaldor), a corrente neoclássica (Solow) e, na lista desta última, ainda a corrente de crescimento endógeno (Lucas e Romer).

Sintetizando as principais características das várias teorias, importa salientar que a corrente clássica defende um limite máximo ao crescimento que pode ser imposto por diversas barreiras, como, por exemplo, espaço insuficiente de cultivo e escassez de nutrientes. A corrente keynesiana sustenta o facto de que o nível de investimento influencia diretamente a poupança de cada país e, consequentemente, o ritmo de crescimento do seu produto interno bruto (PIB). Já para a corrente neoclássica o crescimento é explicado pelo investimento durante a transição para o estado estacionário sendo que, nesse estado, o crescimento positivo só pode ser sustentado pelo progresso técnico exógeno. O modelo de crescimento ótimo de Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) pertence a esta corrente; todavia, difere do modelo seminal de Solow-Swan, pois a poupança é calculada endogenamente. Por último, na teoria do crescimento endógeno, tal como o nome indica, o crescimento económico é explicado pelo próprio modelo (Groth, 2007), podendo o motor de crescimento ser o progresso técnico e/ou a acumulação de capital humano.

De facto, o modelo neoclássico RCK com horizonte temporal infinito, tem como base a maximização da utilidade intertemporal e foi o ponto de partida para os modelos de crescimento económico neoclássicos mais contemporâneos. É o caso do modelo em estudo ao longo desta dissertação, o denominado modelo de Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz (DHSS) que, comparativamente com o modelo RCK, corresponde ao caso em que nem a função de produção (que também é neoclássica e, portanto, apresenta rendimentos constantes à escala, produtividade marginal dos *inputs* positiva mas decrescente e condições de Inada satisfeitas), nem a função utilidade dependem da taxa de extração de recursos não renováveis ou do *stock* de recursos não renováveis. O que corresponde a dizer que a finitude dos recursos naturais é considerada como economicamente irrelevante no

contexto de crescimento; isto é, no comportamento de longo prazo da economia (Barro e Sala-i-Martin, 1999).

Neste trabalho abordamos então o modelo DHSS, um modelo canónico de uma economia com restrição nos recursos. O interesse em abordar este modelo, reside no facto de, contrariamente à maior parte dos modelos económicos, este apresentar uma solução fechada. Esta solução, muito complexa, depende de uma função especial, a função exponencial integral. Esta função pertence a uma família especial de funções, muito utilizadas na física e na matemática uma vez que são particularmente úteis para encontrar soluções de equações diferenciais em temáticas dessas áreas de estudo (Temme, 1996). Já na área da teoria económica o seu uso é relativamente recente. Boucekkine e Ruiz-Tamarit (2008) foram responsáveis pela demonstração da solução no modelo de Lucas-Uzawa, um modelo de crescimento endógeno, através de famílias de funções especiais. E, segundo estes autores, o modelo DHSS é a chave para a análise da dinâmica dos problemas económicos, a caracterização das dinâmicas de transição e o estudo dos vários valores possíveis para as variáveis de estado.

Por todas estas razões, este trabalho também serve para mostrar que uma solução numérica não é menos interessante que uma analítica, sobretudo quando a existência da solução analítica implica uma grande complexidade na relação entre as funções, destacando-se a necessidade de conhecer, neste caso, a função exponencial integral e, conseqüentemente, a manipulação de várias expressões algébricas matematicamente muito complexas. Em consequência, a solução apresentada pelos autores Bencheekroun e Withagen (2011) no modelo DHSS, sendo muito complicada e difícil de obter, não é por si só clarificadora de certas qualidades de interpretação económica pois não fornece informação qualitativa reveladora dessas potenciais características.

Por seu lado, não sendo requerida uma solução exata, a aproximação numérica à solução, complementada pela sua representação gráfica, fornece ao economista capacidades de interpretação e de discussão de cenários. Ness sentido, este modelo foi implementado em *Matlab*, um *software* considerado indicado pois possibilita, para além da resolução numérica do problema, uma fácil interpretação dos resultados, através de representações gráficas elucidativas. Tendo em conta que na maioria dos modelos não é possível obter a solução analítica devido à complexidade do problema, cria-se a necessidade de desenvolver

computacionalmente algoritmos que permitam obter soluções numéricas, daí que os métodos numéricos sejam uma importante ferramenta de trabalho.

A estrutura da presente dissertação é a seguinte:

Na secção dois é efetuada a descrição detalhada do problema de otimização DHSS e ainda a obtenção das condições de primeira ordem. Além disso, com vista a comprovar cálculos intermédios necessários à resolução do modelo, procede-se à implementação das condições de primeira ordem no *Matlab*.

Na secção três explicita-se como se transforma o problema de otimização num sistema de equações diferenciais, com condições iniciais e finais. Tecem-se ainda algumas considerações sobre a solução fechada dada pelos autores Benchekroun e Withagen (2011) para o modelo DHSS.

A simulação do modelo é tratada na secção quatro. Através de métodos numéricos que resolvem problemas de valor fronteira para sistemas de equações diferenciais ordinárias, simulamos vários cenários possíveis. Nesta secção ilustramos os resultados das modelagens experimentais com reflexões críticas consideradas adequadas. Sobretudo, reproduzimos os resultados do artigo de Benchekroun e Withagen (2011).

Na secção cinco são sumariadas as principais conclusões, destacando os contributos deste trabalho para futuras investigações. Sobretudo evidencia-se a flexibilidade e a eficácia da abordagem numérica para a resolução de problemas económicos. Referimos também as dificuldades enfrentadas durante a execução desta dissertação.

Por fim, a sexta e última secção constitui um apêndice matemático de alguns resultados utilizados durante o trabalho. Assim, foi feita uma análise das principais etapas do processo de otimização de um modelo de crescimento económico, usando ferramentas matemáticas; em particular, o cálculo em variações.

2 Descrição e pressupostos do modelo Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz (DHSS)

O objetivo primordial deste trabalho passa por analisar e interpretar as questões relacionadas com a incorporação dos recursos não renováveis na teoria do crescimento económico. Nesse sentido, iremos caracterizar os recursos não renováveis para estudar a viabilidade de um crescimento económico sustentado. Recorde-se que um recurso não renovável é um recurso natural que não pode ser regenerado ou reutilizado a uma escala que possa sustentar a sua taxa de consumo e, portanto, o *stock* de recursos não renováveis é esgotável.

Somente nos últimos trinta anos é que os trabalhos nesta área tiveram um incremento relevante, seguramente pelas preocupações com o meio ambiente e, conseqüentemente, pela escassez crescente dos recursos naturais. Assim, a carência e dificuldades da literatura a respeito do tema são comprovadas por notáveis economistas; em particular, por Solow que afirma que “a literatura sobre os recursos não renováveis não é muito extensa” (Solow, 1974). Mais recentemente, Naredo (1987) sustenta esta afirmação ressaltando “as dificuldades que enfrenta o aparelho conceitual da teoria económica para tratar dos problemas fundamentais que apresentam os recursos naturais e o meio ambiente”. Outros autores, em data posterior, suportam o mesmo tipo de argumentação.

De facto, de acordo com a teoria Malthusiana (1803), os recursos não renováveis tendem a impulsionar menores retornos de capital e trabalho o que levaria a uma estagnação económica no longo prazo. Além disso, Behrens *et al.* (1972) afirma que a perspetiva de longo prazo poderia ser pior do que a estagnação uma vez que a trajetória tecnológica adotada pela sociedade industrial, em 1970 a par da crise mundial do petróleo, seria inviável. Assim, já em 1974, vários economistas como Solow, Stiglitz, Dasgupta contribuíram com estudos para este quadro macroeconómico; em particular, o desenvolvimento sustentável e o crescimento económico sustentado, tendo por base a incorporação dos recursos não renováveis.

O modelo de Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz (DHSS) introduzido na década de 1970 é baseado nos artigos seminais de Dasgupta e Heal (1974), Solow (1974) e Stiglitz (1974) e descreve uma economia com dois ativos, o *stock* de capital humano e o *stock* de recursos não renováveis que é uma forma usual de

analisar os recursos não renováveis com o bem estar social. Juntamente com o capital humano, a matéria-prima a partir dos recursos é usada como meio da produção de uma *commodity* que, posteriormente, tanto pode ser usada para consumo como para o investimento líquido em capital humano.

Segundo a teoria do controlo ótimo, a formulação de um problema de otimização num contexto dinâmico tem alguns elementos fundamentais, nomeadamente: uma função objetivo que deve ser maximizada (minimizada), as equações, algébricas ou diferenciais, que representam o sistema e restringem as ações que podem ser tomadas sobre o mesmo, as condições de equilíbrio e, por último, as condições de transversalidade, que explicitam o estado inicial e final da economia (e que veremos mais adiante). Considere-se agora o problema de controlo ótimo DHSS:

$$\max U \Rightarrow \max \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-\rho t} U(C(t)) dt \quad (2.1)$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = K(t)^\alpha R(t)^{1-\alpha} - C(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -R(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

em que $K(0) = K_0 > 0$ e $S(0) = S_0 > 0$ com

$$U(C) = \begin{cases} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, & \theta > 0, \quad \theta \neq 1 \\ \ln C, & \theta = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Neste modelo, o objetivo dos agentes económicos é maximizar a sua utilidade ao longo da vida (U). Os parâmetros $K(t)$ e $S(t)$ designam o *stock* de capital humano e de recursos não renováveis, respetivamente. Considera-se ainda que o *stock* de capital humano é igual à população total; ou seja, supõe-se que todos os agentes económicos trabalham, ignorando-se assim a reforma, o desemprego, o lazer e a acumulação de capital humano. Importa ainda salientar que os autores do modelo em estudo não assumem a taxa de depreciação do capital para simplificar o tratamento matemático do modelo. Além disso, pela mesma razão, consideram outros pressupostos abstraídos da realidade;

nomeadamente, a consideração da tecnologia e da força de trabalho como variáveis constantes.

As variáveis $C(t)$ e $R(t)$ denotam as taxas de consumo e de extração de recursos não renováveis num determinado instante de tempo e assumem-se não negativas. O *stock* de recursos não renováveis, $S(t)$, diminui com a taxa de extração de recursos, como é possível constatar por (2.3). Interessa ainda destacar que a descrição do processo de extração dos recursos é trivial uma vez que a incerteza e os custos de extração estão a ser ignorados. A elasticidade de produção do capital humano é representada por α , $\alpha \in]0,1[$. Além disso, ρ diz respeito ao fator de desconto intertemporal ($\rho > 0$), isto é, reflete a impaciência dos indivíduos. É de notar que a utilidade dos indivíduos corresponde ao “somatório” (ou seja, o integral), entre zero e infinito, das utilidades instantâneas descontadas à taxa ρ . Esta taxa de desconto ρ tem subjacente o facto de os indivíduos preferirem o consumo próprio ao dos seus descendentes, já que, o consumo mais recente é mais valorizado.

A utilidade instantânea agregada em função do consumo, assumiu-se como $U(C) = \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}$ ($\theta > 0$, $\theta \neq 1$), onde o coeficiente de aversão ao risco pode ser representado pela expressão $\theta = -\frac{C(t)U''[C(t)]}{U'[C(t)]}$. Este coeficiente reflete o grau de concavidade de $U[C(t)]$ e influencia as opções de troca do consumo das famílias entre períodos de tempo distintos. Nesse sentido, quanto maior o valor de θ e, portanto, quanto mais côncava $U[C(t)]$, mais lentamente diminui a utilidade marginal do consumo à medida que o consumo aumenta. Neste caso, em particular, o indivíduo terá um maior desejo em alisar o consumo ao longo do tempo. Analisando a função da velocidade instantânea, tem-se que para $\theta < 1$, o numerador $C^{1-\theta} - 1$ é crescente em $C(t)$, mas é decrescente caso $\theta > 1$, pelo que ao dividir pelo denominador $1 - \theta$, qualquer que seja o valor que θ tome, fica garantido que a utilidade marginal do consumo é positiva. Resta ainda acrescentar que para qualquer variável $x(t)$, adoptamos a convenção $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$.

2.1 Otimização do modelo: condições de primeira ordem

Uma solução para o problema acima é descrita por um quádruplo de caminhos (C, K, R, S) . Para resolver este problema de maximização da utilidade,

construímos o Hamiltoniano, sem ampliação para a forma Lagrangiana, tal como estudaremos no Apêndice 6; isto é, a dedução do Hamiltoniano com duas restrições através do Lagrangiano:

$$H = U(C(t)) + \lambda(t)[K(t)^\alpha R(t)^{1-\alpha} - C(t)] - \mu(t)R(t) \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda(t)[K(t)^\alpha R(t)^{1-\alpha} - C(t)] - \mu(t)R(t) \quad (2.6)$$

As condições de primeira ordem, em termos de Hamiltoniano, ficam como se reconhecem da literatura (Naidu, 2003). Note-se que $\lambda(t)$ designa a variável co-estado associada ao *stock* de capital e $\mu(t)$ diz respeito à variável co-estado associada ao *stock* de recursos não renováveis. Além disso, sabendo que, $C(t)$ e $R(t)$ correspondem às variáveis controlo do problema em estudo e ainda que, $K(t)$ e $S(t)$ correspondem às variáveis estado temos que:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \rho\lambda(t) - \dot{\lambda}(t) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial S} = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t) \quad (2.10)$$

Assim, tendo em vista a resolução do problema DHSS, vamos agora focar-nos nos vários passos para determinar a solução de acordo com as condições dadas pelo Princípio Máximo de Pontryagin ilustradas de (2.11) a (2.14) e exploradas em mais detalhe no Apêndice 6.

$$\frac{\partial H}{\partial C} = 0 \Leftrightarrow \lambda(t) = C(t)^{-\theta} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \Leftrightarrow \mu(t) = \lambda(t)(1-\alpha)R(t)^{-\alpha}K(t)^\alpha \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \rho\lambda(t) - \dot{\lambda}(t) \Leftrightarrow \dot{\lambda}(t) = -\alpha K(t)^{\alpha-1}\lambda(t)R(t)^{1-\alpha} + \rho\lambda(t) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial S} = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t) \Leftrightarrow \dot{\mu}(t) = \rho\mu(t) \quad (2.14)$$

Qualquer solução que satisfaça o sistema anterior juntamente com as condições de transversalidade (2.15) e (2.16) é uma solução ótima do problema em estudo.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \lambda(t) K(t) = 0 \quad (2.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu(t) S(t) = 0 \quad (2.16)$$

Através da análise da equação (2.15)¹ facilmente se conclui que a trajetória ótima deve ser tal que o valor presente do capital, em termos de utilidade, deve ser igual a zero quando o tempo cresce de forma ilimitada. Caso contrário, o agente poderia aumentar o seu bem-estar diminuindo a acumulação de capital e consumindo os seus recursos. Analogamente, por (2.16), verifica-se ainda que a trajetória ótima deve ser tal que o valor presente de recursos não renováveis, em termos de utilidade, deve ser igual a zero quando o tempo cresce de forma ilimitada.

Com vista a calcular a equação de Euler do consumo, aplicamos logaritmos à equação (2.11):

$$\ln(\lambda(t)) = \ln(C(t)^{-\theta}) \quad (2.17)$$

e de seguida derivamos em ordem a t :

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = -\theta \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \Leftrightarrow \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = -\frac{1}{\theta} \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \quad (2.18)$$

De (2.13) vem que:

$$\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)[- \alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha} + \rho] \quad (2.19)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = - \alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha} + \rho \quad (2.20)$$

¹ Em rigor, a condição de transversalidade (2.15) pode ser economicamente interpretada de três formas. Se o *stock* de capital fosse nulo e $\lambda(t) > 0$, então, como o capital teria valor em termos de utilidade, o agente económico consumiria tudo antes do término. Por outro lado, se $k(t) > 0$ e $\lambda(t) = 0$, então o agente terminaria com o capital mas este não teria qualquer valor. Por último, o caso menos interessante acontece quando ambas as componentes da condição são nulas, ou seja, o agente não tem capital mas, este também não tem qualquer valor para ele. Assim, concluímos que o multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$ reflete a variação da utilidade resultante de uma alteração infinitesimal do capital.

Usando a equação obtida anteriormente em (2.18), obtêm-se a equação de Euler do consumo, ou seja, a trajetória do consumo:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} [\alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha} - \rho] \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \dot{C}(t) = \frac{1}{\theta} [\alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha} - \rho] C(t) \quad (2.22)$$

Por outro lado, para obter a equação $\dot{R}(t)/R(t)$ basta fazer um exercício semelhante. Começando por aplicar logaritmos à equação (2.12), vem que:

$$\ln(\mu(t)) = \ln(\lambda(t)(1-\alpha)R(t)^{-\alpha}K(t)^{\alpha}) \quad (2.23)$$

E de seguida, derivando em ordem a t :

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = -\alpha \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right) + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} - \alpha \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right) \quad (2.25)$$

Por último, recordando as expressões (2.2), (2.14) e (2.20) e fazendo as respectivas substituições na equação anteriormente obtida, vem que:

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{1}{\alpha} \left[\rho - (\rho - \alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha}) - \alpha \left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right) \right] \quad (2.26)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{C(t)}{K(t)} \quad (2.27)$$

$$\Leftrightarrow \dot{R}(t) = -\frac{C(t)}{K(t)} R(t) \quad (2.28)$$

2.2 Dedução do modelo: Computação Simbólica

O *Matlab* (*MATrix LABoratory*) é um programa de cálculo numérico que pode ser usado interativamente. Embora na sua versão base o *Matlab* já possua um vasto conjunto de funções de carácter genérico, existem várias bibliotecas de funções adicionais (designadas por *toolbox*) que expandem as suas capacidades em domínios de aplicação mais específicos. Nesse sentido, a *toolbox* simbólica é

muito útil para verificar problemas de cálculo pois permite trabalhar com funções na forma simbólica, retornando uma solução analítica para os problemas. Em geral, existem duas formas de tratar as expressões simbólicas: utilizando *strings* ou objetos simbólicos. Estes últimos são uma classe definida pelo *Matlab* que permite a manipulação através de funções específicas do *symbolic toolbox*.

Ora, o *Matlab* pode ser usado para resolver as condições de primeira ordem atrás apresentadas (secção 2.1 deste trabalho). Ilustra-se, para a maior parte dos cálculos, o uso desta potencialidade pois permite obter e/ou comprovar cálculos intermédios necessários à resolução do modelo. Para o efeito é necessário implementar variáveis simbólicas e isso pode ser facilmente descrito usando o comando *syms*. Por exemplo, *C*, *theta*, *lambda*, *K*, *alfa*, *R*, *mu*, *dlambda*, *rho* são definidas como variáveis simbólicas pelo que não precisam de guardar um valor predefinido como no processamento numérico:

```
syms C theta lambda K alpha R mu dlambda rho %múltiplas variáveis
simbólicas
H = (C.^(1-theta)-1/(1-theta))+lambda*(K.^alpha*R.^(1-alpha)-C)-
mu*R

dHdc = diff(H,C)
dHdr = diff(H,R)
dHdk = diff(H,K)

sol_lambda=solve(1/C^theta - lambda,lambda)
sol_mu=solve(- mu - (K^alpha*lambda*(alpha - 1))/R^alpha,mu)
sol_dlambdaDt= solve(K^(alpha - 1)*R^(1 - alpha)*alpha*lambda -
rho*lambda + dlambda,dlambda)
```

Output dos comandos executados:

```
dHdc = 1/C^theta - lambda
dHdr = - mu - (K^alpha*lambda*(alpha - 1))/R^alpha
dHdk = K^(alpha - 1)*R^(1 - alpha)*alpha*lambda

sol_lambda = 1/C^theta
sol_mu = -(K^alpha*lambda*(alpha - 1))/R^alpha
sol_dlambdaDt = lambda*rho - K^(alpha - 1)*R^(1-
alpha)*alpha*lambda
```

A derivação de uma expressão simbólica usa a função *diff*. É uma boa prática atribuir um nome a cada resposta, em vez de deixar o *Matlab* atribuir o *ans* que é um padrão que se altera de cada vez que é obtida uma nova resposta. Desta forma, *dHdc* é apenas um nome que dá uma indicação do cálculo que está a ser pedido, neste caso em particular, a derivada do Hamiltoniano em ordem a *C*. Um raciocínio análogo foi feito para as restantes derivadas.

Por sua vez, o comando *solve* resolve simbolicamente equações algébricas e tal como referido anteriormente, as equações e as variáveis desconhecidas deverão ser expressões simbólicas ou *strings*.

Com o objetivo de obter a equação de Euler do consumo, começamos por aplicar logaritmos à equação $\lambda(t) = C(t)^{-\theta}$ (2.11) e, posteriormente, derivamos em ordem a t . Obtemos então:

```
lambdat=sym ('lambda(t)')
dg1= diff(log(lambdat))

ct= sym ('c(t)')
thetat= sym ('theta')
dg2=diff(log(ct^-theta),t)
```

O *Matlab* pode realizar operações mais avançadas sobre expressões simbólicas, nomeadamente, a exibição dos resultados de uma forma mais fácil de enxergar usando a função *pretty*. Desta forma, facilmente se conclui que igualando os *outputs* dos comandos executados anteriormente, isto é, *dg1* a *dg2* chegamos à expressão pretendida:

```
dg1 = diff(lambda(t), t)/lambda(t)
pretty(dg1)

diff(lambda(t), t)
-----
lambda(t)

dg2= -(theta*c(t)^theta*diff(c(t), t))/c(t)^(theta + 1)
pretty(dg2)

      theta
theta c(t)      diff(c(t), t)
- -----
      theta + 1
      c(t)
```

Por último, para obter a equação de Euler do consumo,

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} [\alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha} - \rho] \quad (2.21) \quad \text{basta substituir a equação}$$

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = -\alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha} + \rho \quad (2.20) \quad \text{na expressão que calculamos anteriormente.}$$

Para isso, usamos a função *subs* que efetua a substituição de uma variável por um número (ou outra variável).

```

syms theta alpha rho
lambdat=sym ('lambda(t)')
dgl= diff(log(lambdat))
kt=sym ('k(t)')
rt=sym ('r(t)')
subs(dgl,'diff(lambda(t), t)/lambda(t)',-alpha*kt^(alpha-1)*rt^(1-
alpha)+rho)*(-1/theta)

eq_euler = -(rho - alpha*k(t)^(alpha - 1)*r(t)^(1 - alpha))/theta

```

Por último, para obter a equação $\dot{R}(t)/R(t)$ basta derivar a expressão $\ln(\mu(t)) = \ln(\lambda(t)(1 - \alpha)R(t)^{-\alpha}K(t)^\alpha)$ (2.23) em ordem a t .

```

syms alpha
mut=sym ('mu(t)')
lambdat=sym ('lambda(t)')
rt=sym ('r(t)')
kt=sym ('k(t)')
f=log(mut)-log(lambdat*(1-alpha)*rt^(-alpha)*kt^alpha)
diff(f)

dfdt=diff(mu(t), t)/mu(t) - (r(t)^alpha*((k(t)^alpha*(alpha - 1)*
...
diff(lambda(t), t))/r(t)^alpha + (alpha*k(t)^(alpha - 1)* ...
lambda(t)*(alpha - 1)*diff(k(t), t))/r(t)^alpha - ...
(alpha*k(t)^alpha*lambda(t)*(alpha - 1)*diff(r(t), t)) ...
/r(t)^(alpha + 1)))/(k(t)^alpha*lambda(t)*(alpha - 1))

```

No *Matlab* é possível manipularmos expressões que, além de números e variáveis numéricas, contêm também variáveis simbólicas. Assim, usando a função *simplify* no resultado que obtemos anteriormente chegamos à equação (2.25), que tem como argumento de entrada e de saída uma expressão simbólica. Através das substituições consideradas adequadas (e descritas em detalhe na secção 2.1), obtemos a equação (2.27) tal como pretendido.

3 Resolução do modelo DHSS

Neste capítulo vamos ilustrar como se transforma o problema de otimização em estudo num sistema de equações diferenciais, com condições iniciais e finais. Serão tecidas algumas considerações sobre a solução fechada apresentada em “The optimal depletion of exhaustible resources: a complete characterization” pelos autores Benchekroun e Withagen (2011).

Solow (1974) teve um contacto primordial na análise do modelo DHSS. Começou por aplicar o critério *maximin* no contexto do modelo DHSS; ou seja, escolhe-se a melhor alternativa para o consumo entre as piores opções de todas as alternativas. Por outras palavras, o critério *maximin* baseia-se numa visão pessimista e conservadora no sentido em que toma em atenção os piores resultados de cada alternativa.

As funções Cobb-Douglas têm uma propriedade importante pois cada *input* (por exemplo, a extração de recursos não renováveis) é essencial para a produção de um *output* positivo na produção de uma única *commodity*. Na verdade, não é possível que um recurso esgote e que a economia continue a ter um *output* de consumo positivo. Com efeito, no caso de o objetivo ser maximizar a taxa mínima de consumo de todo o horizonte de tempo, a questão central é se apesar da limitação dos recursos, existe uma taxa constante de consumo positivo (Solow, 1974).

Os autores Benchekroun e Withagen (2011) dão, caso raro, uma solução fechada para este modelo. Acontece que a solução foi expressa em termos de uma função especial designada exponencial integral que segundo Abramowitz e Stegun (1972) e Temme (1996) pode ser definida como:

$$E_{\beta}(z) = \int_1^{\infty} e^{-zu} u^{-\beta} du$$

A função $E_{\beta}(z)$ é estritamente decrescente. Além disso, $E_0(z)$ e $E_1(z)$ são casos particulares da exponencial integral que podem ser reescritos como:

$$E_0(z) = \frac{e^{-z}}{z}$$
$$E_1(z) = \int_1^{\infty} e^{-zu} u^{-1} du$$

Os autores, Abramowitz e Stegun (1972) assim como Temme (1996), definem a exponencial integral com β sendo um número inteiro e com $Re(z) > 0$. Desta forma, pela definição, concluímos que β tanto pode ser um número real como um número complexo. Contudo, na análise efetuada por Benchekroun e Withagen (2011), β foi considerado real.

Construímos uma relação de recorrência no *Matlab* de forma a considerar vários valores de β inteiro. Fica desde já apontada esta grande limitação. Os autores afirmam que β pode ser real, mas a caracterização da função exponencial integral, apenas é apresentada para β inteiro (aliás, esta relação de recorrência apenas existe para β inteiro).

```
function eival=ei(beta,z)
% exponencial integral de ordem beta (não negativo)
% produz o valor em z, ei(beta,z), usando a relação de recorrência
% E_(beta +1)(z)=1/ beta[exp(-z)-z*E_beta(z)], beta =1,2,3,...
% E_beta(0)=1/(beta -1), beta=2,3,...

if beta <1, disp('only for beta >=1'); return; end
if z==0
    eival=1/( beta -1);
else
    eival=expint(z);
    for i=2: beta
        eival=1/(i-1)*(exp(-z)-z*eival);
    end
end
end
```

A implementação do código anterior foi feita com base no livro “Handbook of Mathematical Functions” de Abramowitz e Stegun (1972) onde a relação de recorrência é dada por $E_{\beta+1}(z) = \frac{1}{\beta} [e^{-z} - zE_{\beta}(z)]$ ($\beta = 1,2,3 \dots$) e, portanto, $E_{\beta}(0) = \frac{1}{\beta-1}$ ($\beta > 1$). Note-se ainda que a função *expint* avalia o integral exponencial para cada elemento z .

A resolução numérica do modelo não carece da função exponencial integral; ela surge na expressão analítica da solução. Assim, em seguida, resolvemos numericamente o sistema diferencial, destacando a sua implementação em *Matlab*. Efetivamente, uma solução numérica pode dar resposta a modelos mais complexos; com grande probabilidade, alguma alteração ao modelo conduzirá a uma solução fechada (se existir) onde a função exponencial integral pode já não fazer parte. Ainda no decurso do presente trabalho, iremos recuperar a solução dos autores Benchekroun e Withagen (2011)

para $\beta = 1$, contudo, não é explicado como se obtém estas funções para valores não inteiros de β o que restringe muito a análise do problema. Porém, além de reproduzir os cenários do trabalho original, conseguimos ainda simular outros, tal como será ilustrado no capítulo 4.

```
dydt = [y(1)^alpha*y(4)^(1-alpha)-y(3); -y(4);
1/eta*(alpha*y(1)^(alpha-1)*y(4)^(1-alpha)-rho)*y(3);
-y(3)/y(1)*y(4) ];
```

Este sistema diferencial foi construído com base nas equações exploradas e implementadas no capítulo 2, em particular, as equações (2.2), (2.3), (2.22) e (2.28) relativas ao $\dot{K}(t)$, $\dot{S}(t)$, $\dot{C}(t)$ e $\dot{R}(t)$, respetivamente. Recordando,

$$\dot{K}(t) = K(t)^\alpha R(t)^{1-\alpha} - C(t)$$

$$\dot{S}(t) = -R(t)$$

$$\dot{C}(t) = \frac{1}{\theta} [\alpha K(t)^{\alpha-1} R(t)^{1-\alpha} - \rho] C(t)$$

$$\dot{R}(t) = -\frac{C(t)}{K(t)} R(t)$$

Facilmente se conclui que o vetor linha y é dado por $y = [K \ S \ C \ R]$ e, portanto, a primeira entrada do vetor corresponde a $K(t)$ e a última entrada a $R(t)$, já que um vetor é definido através da colocação de uma sequência de parâmetros dentro de parêntesis retos.

Para que o problema fique bem definido matematicamente falta apenas especificar as condições iniciais e finais. Tratando-se este de um problema de valor fronteira, para um momento inicial t_0 , considera-se $K(t_0)=K_0$ e $S(t_0)=S_0$; para condição final em t_T , considera-se $C(t_T)=C_{ss}$ e $R(t_T)=-R_{ss}$ (sendo C_{ss} e R_{ss} os valores em *steady-state* calculados numericamente através da função *fsolve* – responsável pela resolução de sistemas de equações não lineares).

Além disso, para complementar a análise do modelo DHSS efetuada no capítulo que se segue, consideramos ainda a taxa de consumo que resolve o seguinte problema:

$$\max_C \{\min U(C)\}$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \dot{K}(t) = K(t)^\alpha R(t)^{1-\alpha} - C(t) \\ \dot{S}(t) = -R(t) \end{cases} \text{ com } K(0) = K_0 > 0 \text{ e } S(0) = S_0 > 0$$

O critério *maximin* preocupa-se em encontrar o maior consumo constante possível que possa ser mantido para sempre. Ou, por outras palavras, maximizar a utilidade de todas as gerações é o mesmo que maximizar a utilidade apenas da geração mais pobre. Assim, com $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, Solow em 1974², mostrou que a solução para este problema é dada por \tilde{C} , que designa a taxa *maximin* do consumo:

$$\tilde{C} = \alpha(2\alpha - 1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} S_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K_0^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}$$

Esta função descreve a capacidade da economia para sustentar o *stock* de $S(t)$ e $K(t)$ no longo prazo uma vez que, para manter o consumo a este nível é necessário que o investimento em capital compense o esgotamento dos recursos (Hartwick, 1977).

Na otimização dos modelos que incluem os recursos não renováveis, a forma como a utilização dos recursos é feita pelas várias gerações é um tema muito debatido. Uma das suposições implícitas na teoria do crescimento económico usual é que os indivíduos são todos iguais, não só na geração atual, mas em todas as gerações futuras. Ou seja, considera-se que a geração atual sente-se igualmente satisfeita em poupar uma determinada quantidade de recursos para a geração futura ou em consumir o recurso no presente, contando que esse consumo para a geração futura seja descontado a uma determinada taxa de juro. Conclui-se assim que, hipoteticamente, as gerações são constituídas por indivíduos semelhantes em termos de interesses e de função utilidade.

A principal crítica deste critério é que desconta o consumo futuro. Ou seja, é intuitivo pensar na solução com base nesse critério, o que favorece o consumo presente relativamente ao consumo futuro. Ora, em linha de pensamento com este raciocínio resultaria um consumo inicial para o qual qualquer taxa de consumo seria sustentável ao longo do tempo, o que de facto, na sua generalidade, não é

² Para informação adicional da dedução da taxa de consumo *maximin*, consultar Solow (1974).

verdade, tal como foi demonstrado por Benchekroun e Withagen (2011). Basta pensar no *stock* de capital que uma economia teria que ter para que a pobreza não fosse perpetuada, já que, o critério *maximin* é inteiramente dependente das condições iniciais da economia. Consequentemente, quando a economia fosse rica, ela tenderia a permanecer rica, mas pelo contrário, se fosse pobre, tenderia a permanecer pobre.

4 Simulação do modelo DHSS

Como na maioria dos modelos de crescimento económico, o modelo em estudo apresenta um grau de complexidade muito elevado o que dificulta a determinação da solução analítica. Aliás, pode não existir uma solução fechada. Como consequência, é necessário recorrer a métodos numéricos que permitem obter uma solução aproximada. Uma vez mais, o *Matlab* foi o *software* utilizado já que dispõe de múltiplas funções que auxiliam na implementação e simulação do problema DHSS. Nomeadamente, as funções *bvp4c* e *bvp5c* que resolvem problemas de valor fronteira para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

O *bvp4c* usa um método de diferenças finitas que aplica a fórmula de Lobatto de três estágios. Assim, este *solver* é de quarta ordem uma vez que usa um polinómio dessa ordem para fornecer uma solução. Existe ainda o *bvp5c*, de ordem superior, bastante semelhante ao anterior já que também utiliza o método das diferenças finitas e usa a fórmula de Lobatto a quatro estágios. Ao *bvp5c* está associado um polinómio de quinta ordem que fornece uma solução ao implementar, implicitamente, a fórmula de Range-Kutta. Como a implementação da rotina destas duas funções é muito semelhante e ambas constam na versão *standard* do *Matlab*, ao longo deste trabalho, o *solver bvp4c* foi o eleito para simular as várias situações em estudo, como veremos em seguida.

Note-se, contudo, que o método numérico mais recente e cujos autores pretendiam que fizesse parte do *Matlab* para a resolução de equações diferenciais ordinárias foi desenvolvido por Hale (2006) e denomina-se por *bvp6c*. Esta função, mais complexa que as supra indicadas acima, usa o método Cash-Singhal (em substituição ao método de Lobatto) com precisão de sexta ordem pois foi desenvolvida com base no *bvp4c* numa tentativa de melhorar a sua precisão. Como consequência, esta função mais recente é tão robusta quanto a anterior, mas mais eficiente para a maioria dos problemas. Requer assim o aumento dos pontos avaliados no intervalo, para que eles sejam menos espaçados (isto é, exige menos pontos de malha interna para alcançar a precisão estabelecida). Em suma, o algoritmo implementado pelo *bvp6c* é um prolongamento quase direto para o *bvp4c* e, como tal, a sua aplicação é quase idêntica, a menos de algumas rotinas que são alteradas somente quando necessário, para manter a precisão de sexta ordem.

Nesta análise, os métodos de ordem superior não se destacaram face ao *bvp4c*, contrariamente ao que seria de esperar, pelo que optou-se por usar o *solver* mais convencional, ou seja, o *bvp4c*. Além disso, o aumento do rigor da solução numérica não compensa o esforço computacional, uma vez que a diminuição do erro não é significativa, podendo, por vezes, nem chegar a ocorrer. Uma chamada típica à rotina *bvp4c* (de forma semelhante para a *bvp5c*) tem a sintaxe:

```
sol =bvp4c ('edofun', 'ccfun','solinit')
```

onde *edofun* é o sistema de equações diferenciais atrás definido (e designado por *dydt*), *ccfun* são as condições fronteira e *solinit* uma solução inicial. Este último argumento da rotina *bvp4c* cria estimativas iniciais para a solução utilizando uma função mais complexa designada por *bvpinit*. Por esta razão, testamos várias soluções de forma a conseguir a melhor abordagem numérica possível. De facto, nos problemas de valor fronteira não temos informação suficiente para iniciar a resolução numérica passo a passo a partir do ponto inicial, o que tornam os métodos numéricos para a sua resolução complexos.

4.1 Apresentação dos resultados

Em seguida, fornecemos vários exemplos numéricos que ilustram os padrões do consumo em função da abundância dos recursos. O conjunto de parâmetros do modelo foi escolhido através de pesquisa bibliográfica e é definido a partir de testes de calibragem, com o objetivo de refletir fielmente a realidade. Desta forma, as constantes do modelo tomam os seguintes valores: $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $\rho = 0.03$ (Bencheckroun e Withagen, 2011).

Importa ainda referir que a trajetória do consumo ao longo do tempo foi delineada juntamente com a taxa de consumo *maximin*, \tilde{C} , definida para diferentes valores do *stock* de recursos. Desta forma, iremos proceder à comparação da solução do modelo DHSS com a solução do problema onde o objetivo é maximizar a taxa mínima de consumo ao longo de um período de tempo (de notar que todos os resultados gráficos foram ilustrados para $t = 100$). Tal como vimos no capítulo 3, a solução para este último problema é precisamente a taxa de consumo *maximin*.

Por último, para melhor compreender a atribuição dos parâmetros α e β , exploramos situações distintas consoante os rendimentos à escala sejam crescentes ou constantes. A análise do caso em que a função de produção apresentaria rendimentos decrescentes à escala não será tida em consideração pois apesar de ser facilmente exequível em *Matlab*, não faz sentido economicamente. Uma vez que, sendo que a função de produção envolve recursos não renováveis, se esta apresentar rendimentos decrescentes, não há incentivo em investir neles. Com efeito, tal significaria que aumentando os *inputs* numa determinada proporção o *output* vinha aumentado numa proporção menor.

- **Rendimentos crescentes à escala**

Como ficou implícito acima, o conceito de rendimentos à escala traduz a relação entre um aumento das quantidades de todos os fatores produtivos na mesma proporção, e o correspondente aumento de volume da produção. Efetivamente, os rendimentos crescentes à escala ocorrem quando um aumento de todos os fatores produtivos leva a um aumento mais do que proporcional do nível de produção. A função produção tem como *inputs* o *stock* de capital e a taxa de extração de recursos não renováveis, isto é, é dada por:

$$Y(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta \text{ com } \alpha + \beta > 1 \text{ e } \alpha, \beta \geq 0$$

Começamos por estudar as condições em que o consumo está a aumentar por um determinado período de tempo inicial. Nesse sentido, é de salientar o papel fulcral de alguns parâmetros do modelo, nomeadamente, a taxa de preferência temporal, o *stock* de capital inicial e o *stock* de recursos naturais como possíveis responsáveis pelo aumento do consumo num dado período de tempo.

No primeiro exemplo computacional, ilustrado na *Figura 1*, começamos por definir $S_0 = 0.5$. Facilmente observamos que $C_0 \equiv C(0) < \tilde{C}$ e que o consumo está a aumentar inicialmente ao longo do tempo e depois de atingir um pico, entra em declínio.

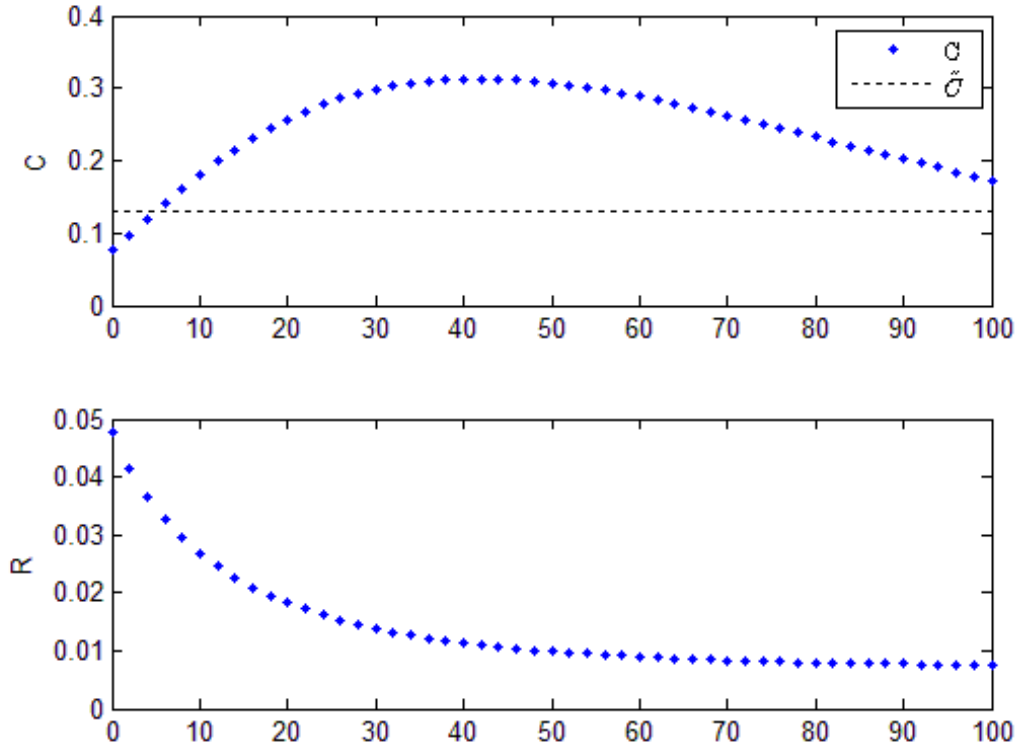


Figura 1. Solução numérica obtida através do *bvp4c* para rendimentos crescentes à escala: $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.5$ (consumo inicial inferior à taxa de consumo *maximin*).

Já na *Figura 2* quando definimos um nível de *stock* de recursos não renováveis ligeiramente inferior ao caso ilustrado na *Figura 1*, em particular $S_0 = 0.1$, verifica-se que a trajetória do consumo mantém um comportamento muito semelhante, mas com $C_0 > \tilde{C}$.

Na *Figura 3*, existe um limite de *stock* de recursos \tilde{S}_0 para o qual $C_0 = \tilde{C}$ (isto é, as duas taxas de consumo coincidem). No exemplo numérico em causa, o valor aproximado de \tilde{S}_0 é $S_0 = 0.1825$, pelo que na *Figura 3* é exposto o caso em que $S_0 = 0.1825$.

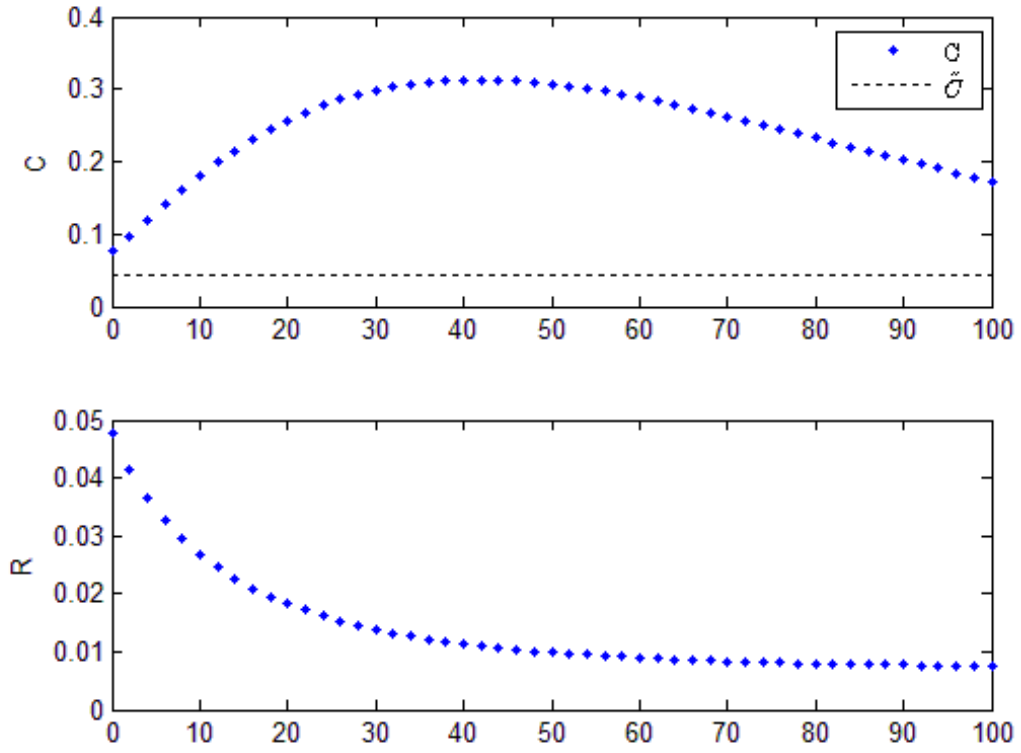


Figura 2. Solução numérica obtida através do *bvp4c* para rendimentos crescentes à escala: $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.1$ (consumo inicial superior à taxa de consumo *maximin*).

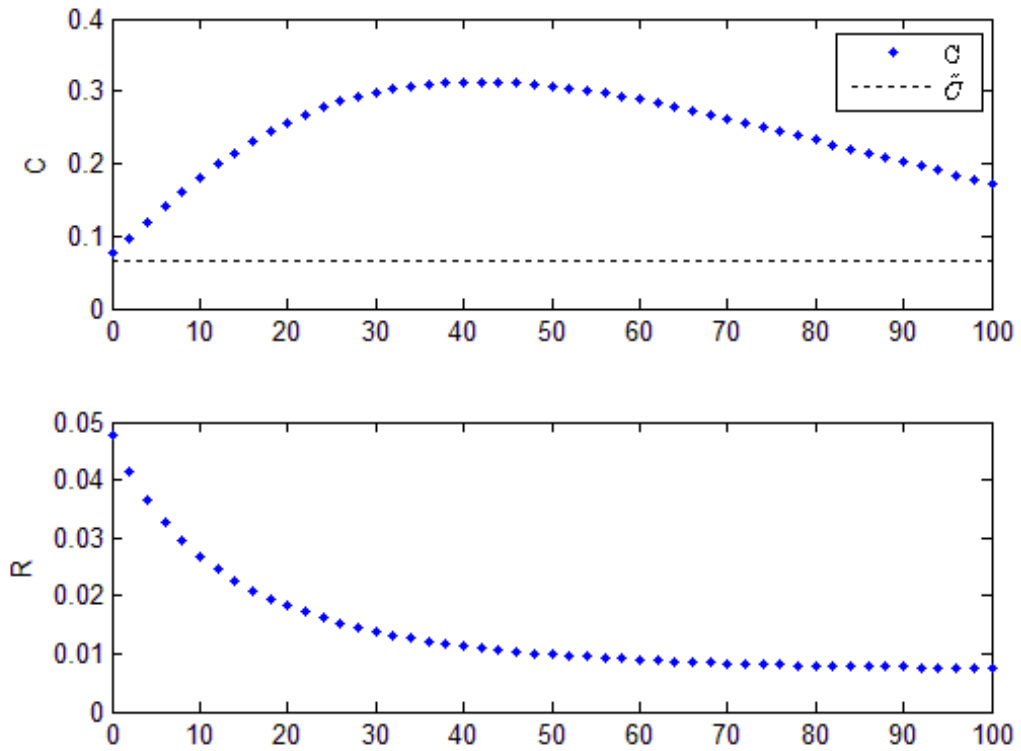


Figura 3. Solução numérica obtida através do *bvp4c*, para rendimentos crescentes à escala: $\alpha = 0.6$, $\beta = 1$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.1825$ (consumo inicial igual à taxa de consumo *maximin*).

- **Rendimentos constantes à escala**

Tendo em consideração que até agora apenas foram estudados casos em que os rendimentos eram crescentes à escala; ou seja, com $\alpha + \beta > 1$, com vista a complementar esta análise iremos agora considerar o caso dos rendimentos constante à escala; ou seja, em que a função produção é dada por:

$$Y(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta \text{ com } \alpha + \beta = 1 \text{ e } \alpha, \beta \geq 0$$

Os rendimentos constantes à escala caracterizam-se por uma variação de todos os fatores produtivos originarem uma variação proporcional da produção. Tomemos como exemplo que se $K(t)$ e $R(t)$ duplicam, então, sob rendimentos constantes à escala, a produção também deve duplicar. Nos exemplos ilustrados em seguida, apenas o α e β serão alterados, sofrendo um choque para valores ligeiramente inferiores de forma a enquadrar-se no caso dos rendimentos constantes à escala. Nesse sentido, para a concretização dos resultados gráficos, os novos valores para estes parâmetros são $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.3$. Relativamente, ao *stock* inicial de recursos não renováveis optamos por ilustrar o caso em que $S_0 = 0.5$, já que para valores similares, obtemos cenários com trajetórias muito semelhantes. De salientar que na *Figura 4* a trajetória da extração de recursos não renováveis ascende a unidades significativamente mais pequenas comparativamente com o caso em estudo anterior.

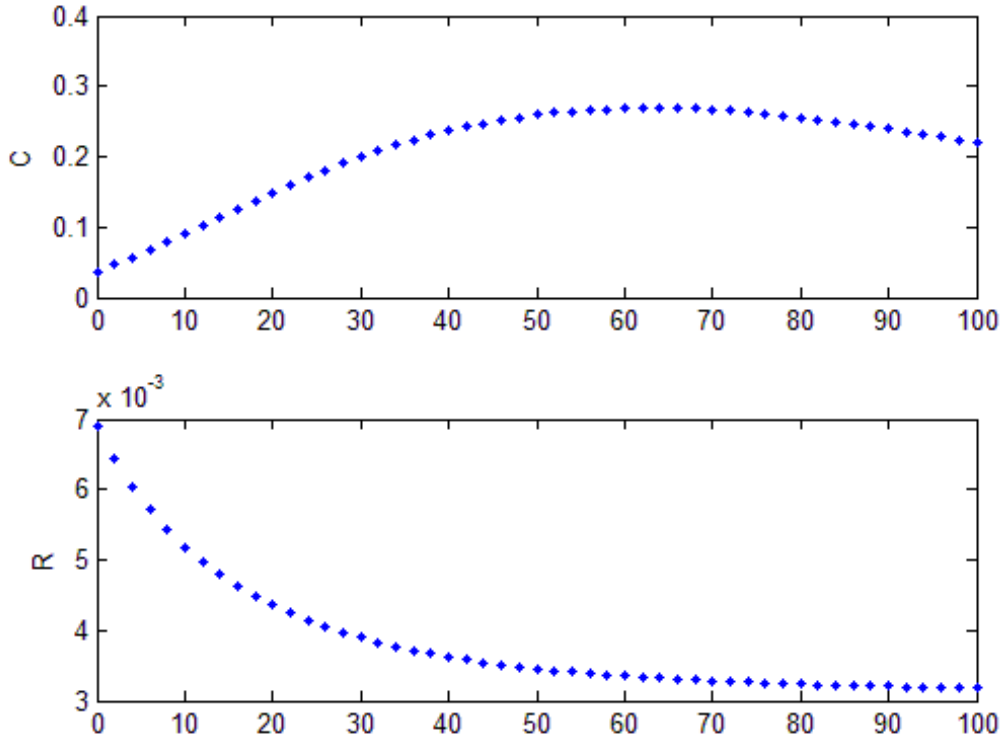


Figura 4. Solução numérica obtida através do *bvp4c*, para rendimentos constantes à escala: $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.3$, $\rho = 0.03$, $\eta = 1$, $K_0 = 1$ e $S_0 = 0.5$.

4.2 Análise e discussão dos resultados

Depois da apresentação dos resultados é agora importante refletir sobre a viabilidade do desenvolvimento sustentável, ou seja, se é viável sustentar indefinidamente um nível de consumo, mesmo com a limitação dos recursos. Assim, na simulação dos vários cenários, procuramos explorar a solução de forma a compreender o comportamento do consumo e dos recursos.

Nesta análise focamo-nos em investigar como a economia se desenvolve, quando o critério de bem-estar se traduz na maximização do bem estar intertemporal. Um dos aspetos importantes que a literatura identifica como uma condição em que existe viabilidade diz respeito à substituíbilidade entre o capital e os recursos não renováveis. Assim, Solow (1977) e Stiglitz (1977) apresentaram uma nova versão da função produção onde os recursos não renováveis tinham sido incluídos, mas conservando a sua forma multiplicativa, tal como estudamos na secção anterior, isto é, $Y(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta$. Por outras palavras, significa que a quantidade de recursos não renováveis, $R(t)$, necessária pode ser tão pequena quanto se deseja, desde que a quantidade de capital, $K(t)$, seja suficientemente grande. Isto é, dada uma menor oferta de recursos, a quantidade de capital pode

aumentar para compensar. Intuitivamente, quanto mais caros os equipamentos de produção, mais eficiente pode ser a utilização e extração de recursos. Este mecanismo é um dos principais focos do modelo DHSS, que tal como vimos, trata-se de uma extensão do modelo de crescimento neoclássico para explicar o papel dos recursos não renováveis.

Além disso, verifica-se que no âmbito do objetivo ser maximizar a taxa mínima de consumo de todo o horizonte temporal, apesar da limitação dos recursos, existe uma taxa para o qual o consumo é positivo como é evidenciado ao longo dos vários cenários, com diferentes rendimentos à escala. Os vários cenários ilustrados para rendimentos crescentes à escala, verificam os resultados reproduzidos analiticamente pelos autores Bencheikroun e Withagen (2011), o que revela que foram conseguidas boas aproximações numéricas.

Complementarmente, os resultados evidenciam a queda do nível de consumo, no longo prazo, com a natural e inevitável diminuição do *stock* de recursos não renováveis. Relembrando que os recursos não renováveis não tem nenhum processo de regeneração natural (pelo menos, não dentro de uma escala de tempo relevante), a extração de modo contínuo por unidade de tempo destes recursos, terá inevitavelmente que diminuir e aproximar-se de zero ao longo do tempo (como aliás é constatado na reprodução da trajetória $R(t)$ nos múltiplos casos em estudo). Note-se, contudo, que tanto $C(t)$ como $R(t)$ não chegam a atingir valores negativos, tal como assumimos na descrição do modelo (secção 2).

Assim, como vimos nos resultados gráficos obtidos em *Matlab*, elevadas taxas de consumo diminuem ao longo do tempo e baixas taxas de consumo aumentam monotonicamente durante um intervalo de tempo inicial, atingindo o seu máximo e entrando depois em declínio. Ora, a literatura comprova essas evidências gráficas já que para a caracterização da solução do problema de DHSS, foi demonstrado sem solução explícita que o consumo atinge um único pico (Pezzey e Whithagen, 1998; e Hartwick e Tian, 2003). Ainda por visualização gráfica, a taxa de crescimento vai crescendo significativamente até esse pico. Posteriormente, verifica-se um decréscimo gradual da taxa de crescimento. Usando a razão do *stock* dos recursos como um indicador da abundância dos recursos, é possível constatar que o consumo inicial começa abaixo da taxa de consumo *maximin* se e só se o recurso é abundante o suficiente.

A par disso, verifica-se ainda que não é necessariamente a geração atual a que mais beneficia.

É ainda de referir que, ao longo da descrição da dinâmica desta economia, apenas foram apresentados os cenários das trajetórias das variáveis do modelo para determinados valores do espectro de valores admissíveis para α e β . Mesmo esta análise tendo sido complementada com resultados além dos reproduzidos no artigo de Benchekroun e Withagen (2011) e, apesar deste modelo afirmar a sua aplicabilidade para modelos de crescimento económico, trata-se de um modelo numericamente muito instável. Nesse sentido, os resultados obtidos, a apresentação das conclusões e a afirmação das limitações deixam bem clara a necessidade de mais investigação futura neste domínio. Consequentemente, a título de exemplo, a investigação de Mitra (1983) merece algum destaque. Este autor considerou o mesmo modelo, em tempo discreto, com um recurso não renovável e com uma tecnologia Cobb-Douglas; e provou que é viável o consumo per capita não diminuir sob a óptica de um crescimento *quasi-arithmetic*³ da população. Desta forma, este autor dá continuidade ao tema em estudo e generaliza as condições para a viabilidade de uma taxa de consumo positiva, que foi demonstrada por Solow (1974) e Stiglitz (1974) no caso em que não há crescimento da população nem progresso tecnológico (tal como a versão do modelo DHSS apresentada).

³ Para informação adicional da definição de crescimento *quasi-arithmetic* da população consultar Asheim *et al.* (2007).

5 Conclusão

O objetivo global desta dissertação consistiu em estudar, detalhadamente, um modelo de crescimento económico, tendo a análise focada no modelo de Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz (DHSS). Trata-se de um modelo considerado muito importante na teoria do crescimento económico, já que incorpora características usadas noutros modelos com grau de complexidade superior. Para além da sua fundamentação teórica, este trabalho conta também com uma pormenorizada dedução matemática do modelo, com a sua resolução e implementação computacional.

Desta forma, procuramos descrever e compreender detalhadamente o problema de otimização em estudo para explorar a solução com vista a ilustrar os padrões de consumo em função da abundância dos recursos. Em particular, concluímos que os resultados evidenciam a queda do nível de consumo, no longo prazo, com a natural e inevitável diminuição do *stock* de recursos não renováveis. Verificou-se ainda que elevadas taxas de consumo diminuem ao longo do tempo e baixas taxas de consumo aumentam durante um intervalo de tempo inicial, atingindo o seu máximo e entrando depois num período de diminuição gradual. Com vista a deixar em aberto a continuidade deste estudo, importa frisar as condições necessárias para evitar a queda do nível do consumo no longo prazo, apesar da irrevogável diminuição do uso de recursos. Com efeito, existem duas formas fundamentais de contrabalançar a extinção dos recursos (que podem ser entendidas como duas importantes extensões do modelo DHSS para investigação futura): a substituição do recurso não renovável por capital e a incorporação do progresso técnico.

Para resolver o problema de valor fronteira, resultante do processo de otimização, foram usados métodos numéricos que constavam na biblioteca do *software* do *Matlab*. Embora a resolução numérica exija competências técnicas avançadas e algum conhecimento matemático (pois a resolução numérica do modelo não é trivial), estes requisitos são de uma dificuldade e complexidade incomparavelmente menores quando comparadas com a aridez das necessidades multidisciplinares requeridas no desenvolvimento de expressões funcionais em prol da obtenção da solução analítica. Não obstante a isso, mesmo que as soluções analíticas existam, tal como para o presente modelo, não dão qualquer

intuição de interpretação económica. Na verdade, a solução numérica é uma solução mais flexível pois pode adaptar-se de modo semelhante a extensões do modelo, perspetivando o uso indiscriminado dos métodos numéricos em estudo, na resolução de problemas de crescimento com fundamentação baseada no modelo DHSS. Definitivamente, a solução numérica deve ser fortemente valorizada dada a sua eficácia na aproximação da solução original, tal como constatado na reprodução da solução analítica.

Nesse sentido, a componente numérica mereceu algum destaque neste trabalho pois na maioria dos modelos de crescimento económico não se dispõe de uma solução analítica, pelo que verifica-se a necessidade de recorrer a soluções numéricas para auxiliar na resolução do problema. Desta forma, este trabalho pode constituir um importante contributo no sentido em que pode permitir extrair conclusões para extensões do modelo em estudo, abrindo novas linhas de investigação.

6 Apêndice

6.1 Dedução do Hamiltoniano com duas restrições

Neste apêndice, será apresentado o problema de controlo ótimo segundo o cálculo em variações. Nesse sentido, serão enunciadas algumas definições básicas bem como os formalismos Lagrangianos e Hamiltonianos necessários para a otimização. Neste apêndice, seguimos de perto as deduções em Naidu (2003).

- **Cálculo em Variações**

Com vista a resolver o problema em estudo (recordar equações 2.1 a 2.4 do capítulo 2) estudamos sistemas de controlo ótimo usando cálculo em variações. O cálculo em variações é um ramo da matemática que procura descobrir os extremos (máximos ou mínimos) de um funcional. Assim, é importante ter presente alguns conceitos básicos que iremos precisar ao longo deste capítulo nomeadamente, funcional, incremento e variação de um funcional.

Começemos por nos focar no conceito de funcional, que, em termos genéricos, pode ser pensado como uma função de uma função uma vez que um funcional depende de várias funções. Ou seja, uma quantidade variável J é um funcional que depende da função $f(x)$ e que pode ser representado como, $J = J(f(x))$, isto é, como se para cada função $f(x)$ correspondesse um valor de J . Desta forma, verifica-se uma correspondência: para uma dada função $f(x)$ existe um número J . Posteriormente, também iremos precisar de ter presente o conceito de incremento de um funcional, que iremos designar por ΔJ e pode definir-se como, $\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t))$, onde $\delta x(t)$ diz respeito à variação da função $x(t)$. Por último, iremos proceder à caracterização da variação de um funcional. Para isso, expandimos em série de Taylor $J(x(t) + \delta x(t))$:

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(x(t)) + \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \dots - J(x(t)) \\ &= \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \dots = \delta J + \delta^2 J + \dots\end{aligned}$$

onde $\delta J = \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t)$ corresponde à primeira variação (ou simplesmente variação) e $\delta^2 J = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2$ à segunda variação do funcional J . Por outras palavras, a variação δJ do funcional J é a parte linear, em $\delta x(t)$, do incremento ΔJ . A *Figura 5* esclarece a relação entre incremento e variação de um funcional.

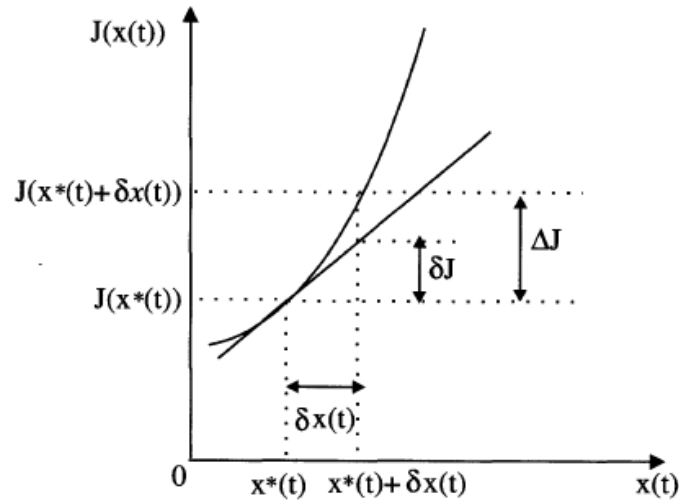


Figura 5. Incremento ΔJ e primeira variação δJ do funcional J (retirado de Naidu, 2003)

• Abordagem variacional para um sistema de controlo ótimo

Um sistema de controlo é um sistema dinâmico, que evolui no tempo e sob o qual podemos agir através de uma função de comando ou controlo. A teoria do controlo ótimo analisa as propriedades destes sistemas com o intuito de os deslocar de um determinado estado inicial para um dado estado final, respeitando as restrições impostas (Weber, 2011).

Neste capítulo, iremos construir o Hamiltoniano pelas técnicas variacionais que foram usadas por Pontryagin e estão relacionadas com o princípio mínimo. Começemos por analisar o problema com uma função terminal, também denominado como problema de Bolza, em que existe uma função terminal adicionada à função funcional. O índice de desempenho representa um critério para aferir o comportamento do sistema uma vez que é composto por duas medidas de avaliação: uma associada ao estado final do sistema dinâmico e a outra associada à evolução do estado e do controlo ao longo do horizonte de controlo. Note-se que, $[t_0, t_f]$ diz respeito ao intervalo de atuação do controlo,

usualmente denominado por horizonte de controle. Formalizando matematicamente, o problema de Bolza do controlo ótimo consiste na maximização (ou minimização) de funcionais da forma

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (6.1)$$

sujeitos à restrição $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ (6.2) e às condições fronteira:

$$x(t_0) = x_0; t_0 \text{ é fixo}$$

$$x(t_f) \text{ é livre; } t_f \text{ é livre}$$

Neste problema de controlo ótimo geral, em tempo contínuo é ainda de referir que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^r$, ou seja, $x(t)$ e $u(t)$ são vectores de dimensão n e r , respectivamente, em que $x(t)$ representa as variáveis estado (no caso em estudo, $K(t)$ e $S(t)$), enquanto que $u(t)$ representa as variáveis controlo (isto é, $C(t)$ e $R(t)$).

Antes de ilustrarmos o Princípio Máximo de Pontryagin, denotemos o seguinte:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{dS(x(t), t)dt}{dt} = [S(x(t), t)]_{t_0}^{t_f} = S(x(t_f), t_f) - S(x(t_0), t_0) \quad (6.3)$$

Usando a equação (6.3) no índice de desempenho (6.1), obtêm-se outro funcional:

$$J_2(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[V(x(t), u(t), t) + \frac{dS}{dt} \right] dt$$

$$J_2(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt + S(x(t_f), t_f) - S(x(t_0), t_0) \quad (6.4)$$

Observando o índice de desempenho expresso em (6.4), facilmente se verifica que desde que $S(x(t_0), t_0)$ seja uma quantidade fixa, ele é equivalente à optimização do índice de desempenho (6.1). No entanto, o valor ótimo dado por (6.1) é diferente do valor ótimo obtido em (6.4). Contudo, corresponde ao mesmo valor ótimo pois o nosso objectivo é somente encontrar o controlo ótimo. Nesse sentido, o valor ótimo é calculado usando o índice de desempenho descrito em (6.1) e não em (6.4), pelo que o funcional (6.1) fica reduzido a:

$$\frac{dS[(x(t), t)]}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)' \dot{x}(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (6.5)$$

Em seguida, iremos enunciar as várias etapas do processo que nos vão permitir introduzir o Lagrangiano e posteriormente, o Hamiltoniano.

- I. Pressupostos das condições ótimas
- II. Variações dos vetores controlo e estado
- III. Multiplicadores de Lagrange
- IV. Lagrangiano
- V. Primeira Variação
- VI. Condições de extremo
- VII. Hamiltoniano

Passemos então à descrição detalhada de cada uma das etapas.

I. Pressupostos das condições ótimas

Vamos assumir que as variáveis estado e controlo são ótimas em $x^*(t)$ e $u^*(t)$, respectivamente. Têm-se então que:

$$J(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[V(x^*(t), u^*(t), t) dt + \frac{dS(x^*(t), t)}{dt} \right] dt$$

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t) \quad (6.6)$$

II. Variações dos vetores controlo e estado

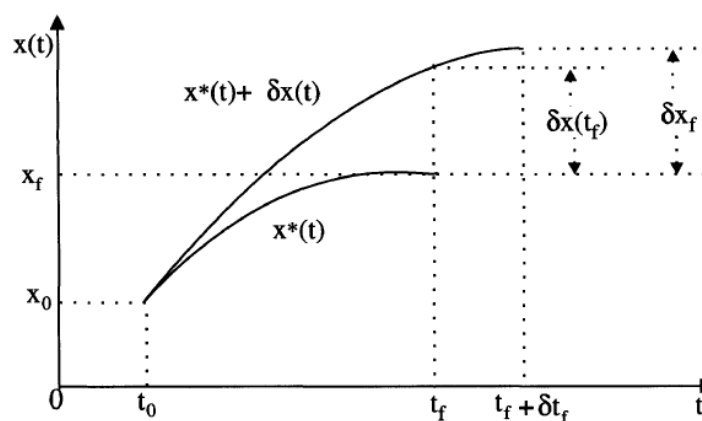


Figura 6. Sistema de valores finais livres de tempo e estado, em que se pretende representar as perturbações efetuadas no vetor estado $x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ e no vetor controlo $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$ (retirado de Naidu, 2003)

Considerando as variações especificadas anteriormente nos vetores controle e estado, tal como ilustrado na *Figura 6*, vem que:

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t) &= f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) \\ J(u(t)) &= \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \frac{dS}{dt} \right] dt\end{aligned}\quad (6.7)$$

III. Multiplicadores de Lagrange

Introduzindo o multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$, também usualmente denominado por vetor co-estado e usando (6.5), obtemos o índice de desempenho aumentado, no ponto ótimo:

$$\begin{aligned}J_a(u^*(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[V(x^*(t), u^*(t), t) dt + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* \right. \\ &\quad \left. + \lambda'(t) \{ f(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t) \} \right] dt\end{aligned}\quad (6.8)$$

e para qualquer outra condição perturbada vem que:

$$\begin{aligned}J_a(u(t)) &= \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)'_* [\dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t)] + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* + \lambda'(t) [f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) - \{\dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t)\}] \right] dt\end{aligned}\quad (6.9)$$

IV. Lagrangiano

No ótimo, a função Lagrangiano é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}(x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x^*(t), u^*(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)'_* \dot{x}^*(t) + \frac{dS}{dt} + \lambda'(t) \{ f(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t) \}\end{aligned}\quad (6.10)$$

e para qualquer outra condição perturbada, vem que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\delta &= \mathcal{L}^\delta(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t), u^*(t) + \delta u(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)'_* [\dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t)] +\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* + \lambda'(t)[f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) - \{\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)\}] \quad (6.11)$$

Nesse sentido, o índice de desempenho aumentado no ponto ótimo e para qualquer outra condição é dado por:

$$\begin{aligned} J_a(u^*(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L} dt \\ J_a(u(t)) &= \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}^\delta dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt \end{aligned} \quad (6.12)$$

Usando o Teorema do Valor Médio e o desenvolvimento em Série de Taylor e considerando apenas os termos lineares, têm-se que:

$$\begin{aligned} \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt &= [\mathcal{L}^\delta]_{t_f} \delta t_f \\ \approx \left[\mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)'_* \delta x(t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta \dot{x}(t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)'_* \delta u(t) \right]_{t_f} \delta t_f &\approx [L]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (6.13)$$

V. Primeira Variação

Para a concretização deste passo, depois de definir o incremento ΔJ , estudado anteriormente, deve-se aplicar a expansão da série de Taylor e extrair a primeira variação δJ , mantendo apenas os termos de primeira ordem. Consequentemente, a primeira variação é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J_a(u(t)) - J_a(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{L}^\delta - \mathcal{L}) dt + [L]_{t_f} \delta t_f \\ \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)'_* \delta x(t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta \dot{x}(t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)'_* \delta u(t) \right\} dt + [L]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (6.14)$$

Agora, para se obter $\delta \dot{x}(t)$ como função de $\delta x(t)$, usamos a integração por partes ($\int u dv = uv - \int v du$), isto é,

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \frac{d}{dt} (\delta x(t)) dt =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \right] \delta x(t) dt \quad (6.15)$$

Observe-se que $\delta x(t_0) = 0$ uma vez que $x(t_0)$ é fixo. Consequentemente, usando a expressão obtida acima (6.15) na primeira variação δJ da equação (6.14) vem que:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)'_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \right] \delta x(t) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)'_* \delta u(t) + [\mathcal{L}]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta x(t) \right]_{t_f} \end{aligned} \quad (6.16)$$

VI. Condições de extremo

De acordo com o enunciado do Teorema 1 (conhecido como o teorema fundamental do cálculo das variações) para se obter o extremo de um funcional J , é necessário que a primeira variação δJ seja zero.

Teorema 1. A condição necessária para $x^*(t)$ ser um candidato a valor ótimo, é que a primeira variação de J seja zero em $x^*(t)$, ou seja, $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$ para todos os valores admissíveis de $\delta x(t)$. Como condição suficiente tem-se que a segunda variação tem que ser positiva caso seja um ponto de mínimo ($\delta^2 J > 0$) ou negativa, caso seja um ponto de máximo ($\delta^2 J < 0$).

Além disso, num problema típico de controlo ótimo como em (6.2), denotamos $\delta u(t)$ como a variação de controlo independente e $\delta x(t)$ como a variação de estado dependente. Primeiramente, escolhemos $\lambda(t) = \lambda^*(t)$ tal que o coeficiente de variação dependente $\delta x(t)$ em (6.16) se anule. Assim, surge a equação de Euler Lagrange, onde as derivadas parciais estão avaliadas no ótimo, ou seja,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)'_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* = 0 \quad (6.17)$$

De seguida, uma vez que a variação do coeficiente independente $\delta u(t)$ é arbitrária, o coeficiente de variação de controlo $\delta u(t)$ em (6.16) tem que ser zero. Por outras palavras, $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)'_* = 0$ (6.18).

Finalmente, a primeira variação (6.16) fica reduzida a:

$$\delta J = 0 \Leftrightarrow [\mathcal{L}^*]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_{*} \delta x(t) \right]_{t_f} = 0 \quad (6.19)$$

Desta forma, a equação (6.2) pode ser reescrita, em termos de Lagrangiano (6.10) como $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right)_{*} = 0$ (6.20).

Com o objetivo de converter a expressão que contém $\delta x(t)$ em (6.19), numa outra expressão que contenha δx_f , observe-se que a derivada de $\dot{x}^*(t_f) + \delta \dot{x}(t_f)$ em t_f é aproximadamente,

$$\dot{x}^*(t_f) + \delta \dot{x}(t_f) \approx \frac{\delta x_f - \delta x(t_f)}{\delta t_f} \quad (6.21)$$

que pode ser reescrita como $\delta x_f = \delta x(t_f) + \{\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)\} \delta t_f$ e restando apenas os termos lineares (em δ) na equação anterior, temos $\delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}^*(t_f) \delta t_f$ (6.22).

Usando a expressão (6.22) na condição fronteira (6.19), obtemos a condição fronteira, em termos de Lagrangiano, ou seja,

$$\left[\mathcal{L}^* - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_{*} \dot{x}(t) \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_{*} \right]_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (6.23)$$

VII. Hamiltoniano

Definindo o Hamiltoniano H^* , também designado por função de Pontryagin H , no ponto ótimo temos que:

$$\begin{aligned} H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \\ = V(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^{*'}(t) f(x^*(t), u^*(t), t) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Assim sendo, comparando a função Hamiltoniano (6.24) com o Lagrangeano (6.10), observa-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= \mathcal{L}^*(x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \\ &= H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)'_{*} \dot{x}^*(t) + \left(\frac{dS}{dt} \right)_{*} - \lambda^{*'}(t) \dot{x}^*(t) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Usando, (6.25) em (6.18), (6.17) e (6.20) e tendo em consideração a função $S = S(x(t), t)$, obtemos as variáveis controle, estado e co-estado, respectivamente, expressas em termos de Hamiltoniano. Assim, no ponto ótimo $u^*(t)$, a relação (6.18) torna-se no seguinte:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0 \quad (6.26)$$

Além disso, para o ponto ótimo $x^*(t)$, a relação (6.17) passa a ser:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t}\right)_* - \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* - \lambda^*(t) \right\} = 0 \\ & \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t}\right)_* - \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t}\right)_* - \dot{\lambda}^*(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* = -\dot{\lambda}^*(t) \quad (6.27)$$

e ainda, para a variável co-estado $\lambda^*(t)$, tem-se que:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* = \dot{x}^*(t) \quad (6.28)$$

Reparando na equação (6.27) e no vetor co-estado $\lambda^*(t)$, na equação (6.28) e no estado ótimo $x^*(t)$ é possível observar que tem uma estrutura muito semelhante, daí que $\lambda(t)$ seja o vector co-estado.

Para concluir, usando a relação (6.25), a condição fronteira (6.23) no ótimo fica reduzida a:

$$\begin{aligned} & \left[\mathcal{L}^* + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* - \lambda^{*'}(t) \dot{x}^*(t) - \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* - \lambda^{*'}(t) \dot{x}^*(t) \right\} \right]_{t_f} \delta t_f + \\ & + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* - \lambda^{*'}(t) \right]_{t_f} \delta x_f = \left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* - \lambda^{*'}(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0 \end{aligned}$$

Esta é uma condição fronteira geral para sistemas de pontos finais livres, em termos de Hamiltoniano.

7 Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1972), “Handbook of Mathematical Functions”, New York, Dover Publications
- [2] Asheim, G., Buchholtz W., Hartwick J., Mitra T. e Withagen C. (2007), "Constant Saving Rates and Quasi-arithmetic Population Growth under Exhaustible Resource Constraints", *Journal of Environmental Economics and Management*, 53, pp. 213-229
- [3] Barro, R. J e Sala-i-Martin, X. (1999), “Economic Growth”, The MIT Press
- [4] Behrens, W., Meadows, D. e Randers, J. (1972), “The Limits to Growth”, Universe books, New York
- [5] Benckekroun, H. e Withagen, C. (2011), “The optimal depletion of exhaustible resources: a complete characterization”, *Resource and Energy Economics*, Vol. 33, Issue 3, September 2011, pp. 612-636
- [6] Boucekkine, R. e Ruiz-Tamarit, J. (2008): “Special functions of the study of economics dynamics: The case of the Lucas-Uzawa model”, *Journal of Mathematical Economics* 44, pp. 33-54
- [7] Dasgupta, P. e Heal, G. (1974), “The optimal depletion of exhaustible resources”, *Review of Economic Studies*, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, pp. 3-28
- [8] Groth, C. (2007), “A New Growth Perspective on Non-Renewable Resources”, *Sustainable Resource Use and Economic Dynamics*, Springer
- [9] Hale, N.P. (2006), “A Sixth-Order Extension to the Matlab bvp4c Software of J. Kierzenka and L. Shampine”, Department of Mathematics, Imperial College London
- [10] Hartwick, J. (1977), “Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources", *American Economic Review*
- [11] Hartwick, J., Long, N. e Tian, H. (2003), “On the peaking of consumption with exhaustible resources and zero net investment”, *Environmental and Resource Economics* 24, pp. 235-244
- [12] Malthus (1803), “An Essay on the Principle of Population”, Everyman’s Library, London

- [13] Mitra, T. (1983), “Limits on population growth under exhaustible resource constraints”, *International Economic Review* 24, pp. 155-168
- [14] Naidu, D.S. (2003), “Optimal Control Systems”, CRC Press
- [15] Naredo, J. M. (1987), “ La economia en evolución”, 3ª Edição Madrid
- [16] Pezzey, J. e Withagen, C. (1998), “The rise, fall and sustainability of capital-resource economies”, *Scandinavian Journal of Economics* 100
- [17] Solow, R. (1977), “Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz”, *Ecological Economics*, ISEE, Vol. 22
- [18] Solow, R. (1974), “Intergenerational equity and exhaustible resources”, *Review of Economic Studies*, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, pp. 29-46
- [19] Stiglitz, J. (1974), “Growth with exhaustible natural resources: Efficient and optimal growth paths”, *Review of Economic Studies*, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, pp. 123-137
- [20] Stiglitz, J. (1977), “Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz”, *Ecological Economics*, ISEE, Vol. 22
- [21] Temme, N.M. (1996), “Special Functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics”, Wiley
- [22] Weber, Thomas A. (2011), “Optimal control theory with applications in economics. London”, MIT Press